

Sujet

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite( n ) :  
    u = 1 000  
    for i in range(n) :  
        u = 0,9*u + 250  
    return u
```

4.
 - a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1\,500$.
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

$$u_n = -1\,500 \times 0,9^n + 2\,500.$$

- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.
Déterminer cette année.